Feuille d'exercices n° 3. Exemples d'EDP: Transport, ondes, Laplace et chaleur. Compléments sur la transformée de Fourier.

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel non nul et Ω un borélien de $\mathbf{R}^N$. Sauf mention contraire on intégrera toujours par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Conditions de saut.*

1. On rappelle que $H := 1_{\mathbf{R}_+}$ désigne la fonction de Heaviside. Retrouver H'.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. On se donne $x_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ homéomorphisme croissant de classe $\mathcal{C}^1$ et $(u_-, u_+) \in \mathbf{R}^2$. À quelle condition la fonction
$$u : \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (t,x) \mapsto \begin{cases} u_- & \text{si } x < x_0(t) \\ u_+ & \text{si } x \geq x_0(t) \end{cases}$$
définit-elle une solution au sens des distributions de $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$?

Exercice 2. *Equation non linéaire*

On considère maintenant l'équation non linéaire
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x\Big(F\big(u(t,x)\big)\Big) = 0, \quad t \in \mathbf{R}^+, \ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$
où $u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont deux fonctions données. On suppose que F est de classe $C^2(\mathbf{R})$ et on note $c = F'$.

1. *Caractéristiques.* On suppose que u est une solution de classe C^1 de (1). On définit les courbes caractéristiques $X(t,x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = c\big(u(t, X(t,x))\big), \\ X(0,x) = x \end{cases} \tag{2}$$
Calculer $u(t, X(t,x))$ puis $X(t,x)$ en fonction de u_0.
2. Dans la suite, on suppose que u_0 est de classe C^1, bornée et à dérivée bornée sur $\mathbf{R}$.
On définit le temps T^* par
$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c(u_0) \text{ croissante} \\ -\frac{1}{\inf_{\mathbf{R}} \frac{d}{dx}(c(u_0))} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3}$$
Montrer qu'il existe $Y \in C^1([0,T^*[\times\mathbf{R})$ tel que pour tout $t \in [0, T^*[$, tout $x \in \mathbf{R}$, tout $y \in \mathbf{R}$,
$$y = X(t,x) \Longleftrightarrow x = Y(t,y).$$
3. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^1([0,T^*[\times\mathbf{R})$ à (1).
4. Montrer que si $T^* < +\infty$, alors $\lim_{t\to T^*} \|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = +\infty$.

Exercice 3. *Équation des ondes*

On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogène en dimension 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbf{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

avec $c \neq 0$. On suppose que $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et que le problème admet une solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, \mathcal{S}(\mathbf{R}))$.

1. On considère la transformée de Fourier pour la seule variable x, i.e.

$$\widehat{u}(\xi,t) = (\mathcal{F}_x u)(\xi,t) = \int_{\mathbf{R}} u(x,t) e^{-ix\xi} dx, \quad \forall (\xi,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

   Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}$.

2. En déduire que pour tout $(\xi,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (en utilisant un prolongement adéquat en $\xi = 0$) :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi) \frac{e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}}{2} + \widehat{u_1}(\xi) \frac{e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}}{2ic\xi}$$

3. Conclure que la solution u vérifie pour tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

4. Réciproquement, montrer que cette fonction est bien dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et vérifie le problème de Cauchy.

Exercice 4. *Transport à coefficient constant.*
Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N) \cap \mathcal{C}^2(\mathbf{R}; \mathcal{S}(\mathbf{R}^N))$ vérifie :

$$\partial_t u \; + \; a \cdot \nabla_x u \; = \; 0 \qquad \text{et} \qquad u(0, \cdot) = u_0, \quad a \in \mathbf{C}^N. \tag{4}$$

Déterminer $\widehat{u}$ en fonction de $\widehat{u_0}$, puis u en fonction de u_0 (et vérifier qu'il s'agit bien d'une solution classique satisfaisant les hypothèses de l'énoncé).

Exercice 5. *Solutions fondamentales du laplacien.*
On suppose $N \geq 2$, on note α_N le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^N$ et l'on définit

$$E \, : \, \mathbf{R}^N \to \mathbf{R} \, , \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{-1}{2\pi} \; \log(\|x\|) & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{N(N-2)\alpha_N} \; \frac{1}{\|x\|^{N-2}} & \text{si } N \geq 3 \end{cases} .$$

1. Justifier que $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$.
2. Montrer que $\Delta E = \delta_0$.

Exercice 6. *Équation de la chaleur.*
Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$. Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N) \cap \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+; \mathcal{S}(\mathbf{R}^N))$ vérifie

$$\partial_t u \; - \; \Delta_x u \; = \; 0 \qquad \text{et} \qquad u(0, \cdot) = u_0 \, . \tag{5}$$

Déterminer $\widehat{u}$ en fonction de $\widehat{u_0}$, puis u en fonction de u_0 (et vérifier qu'il s'agit bien d'une solution classique satisfaisant les hypothèses de l'énoncé).

Exercice 7. *Quelques calculs explicites pour la transformée de Fourier.*

1. Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[-a,a]}$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^{-|x|}$.
3. En déduire que f vérifie $f - f'' = 2\delta_0$ au sens de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Exercice 8. *Principe d'incertitude d'Heisenberg*

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ à valeurs complexes. Montrer que
$$\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right) \geq 2\pi\left(\int_{\mathbf{R}} x\mathcal{R}e\Big(\bar{f}(x)f'(x)\Big)dx\right)^2.$$

2. En déduire
$$\left(\int_{\mathbf{R}} x^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2dx\right)^2.$$

3. Déduire de ce qui précède une minoration de
$$\left(\int_{\mathbf{R}} (x-\bar{x})^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} (\xi-\bar{\xi})^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)$$
pour $\bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbf{R}$.

4. On suppose que $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2dx = 1$. Montrer que la quantité ci-dessus est minimale lorsque
$$\bar{x} = \int_{\mathbf{R}} x|f(x)|^2dx \quad \text{et} \quad \bar{\xi} = \int_{\mathbf{R}} \xi|\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

5. Calculer
$$\inf\left(\int_{\mathbf{R}} (x-\bar{x})^2|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}} (\xi-\bar{\xi})^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\right)$$
lorque $\bar{x}$ et $\bar{\xi}$ sont choisis comme dans la question précédente et que f décrit l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ telles que $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2dx = 1$.
Indication. On pourra étudier le cas où f est une gaussienne.